Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

RECUPERATORIO de 1er Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

21 de octubre de 2013

TEMA: **40**

1	2	3		4		Nota Final
3 p	3 p	1.5 p	1.5 p	1 p	2 p	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO: 60 MINUTOS

Ejercicio n° 1

Halle en forma binómica todos los complejos z que cumplan:

$$z^2 - 6\,z + 11 + (2z - 10)\,j = 0 \quad \wedge \quad |\,\bar{z} - (3 - j)\,| < 2$$

Ejercicio n° 2:

Resuelva utilizando transformada Z:

$$x(n+2) - 3\,x(n+1) - 10\,x(n) = -40 \bullet 3^n \qquad \text{con } x(0)=2 \ \wedge \ x(1) = 2$$

Ejercicio n° 3:

Sea $f(t) = t^2 + 1$ en (0;1)

a) Complete f en (-1;0) para que la Serie Exponencial de Fourier tenga todos los coeficientes reales e indique el valor medio.

b) Complete gráfica y analíticamente f para que tenga simetría de media onda.

Ejercicio n° 4:

Dada la transferencia de un sistema: $G(s) = \dfrac{s^2 - s - 6}{(s^2 - 10s + 29)(s + 1)}$

a) Indique si el sistema es estable (justifique) y grafique aproximadamente el corte de $|\,G(s)\,|$ por el eje real

b) Halle la respuesta del sistema al impulso unitario.

Firma del alumno: ....

RESPUESTAS PARCIAL 1 TEMA 40

Ejercicio 1:

a) Acomodando los términos: $z^2 - (6-2j)\,z + 11 - 10j = 0$

Utilizando la fórmula resolvente cuadrática:

$$z_{1,2} = \frac{6-2j \pm \sqrt{(6-2j)^2 - 4(11-10j)}}{2} = \frac{6-2j \pm \sqrt{36-24j-4-44+40j)}}{2} = \frac{6-2j \pm \sqrt{-12+16j}}{2} =$$

$$= \frac{6-2j \pm \sqrt{4(-3+4j)}}{2} = \frac{6-2j \pm 2\sqrt{-3+4j}}{2} \quad (\ast)$$

Ahora calculamos las dos raíces cuadradas de $z = -3+4j$, resulta $|z| = 5$ entonces:

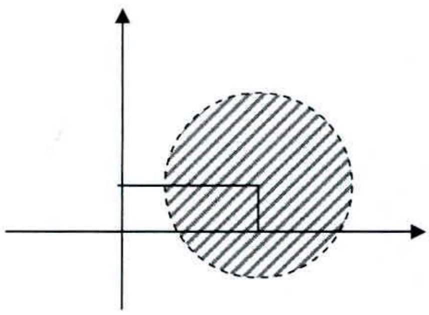
$$x = \pm\sqrt{\frac{5-3}{2}} = \pm 1 \qquad \wedge \qquad y = \pm\sqrt{\frac{5+3}{2}} = \pm 2$$

Pero como $Im(z) > 0$ queda: $w_1 = 1 + 2j \quad \wedge \quad w_2 = -1 - 2j$

Volviendo a $(\ast)$: $z_1 = \dfrac{6-2j+2\,(1+2j)}{2} = 4 + j \quad \wedge \quad z_2 = \dfrac{6-2j+2\,(-1-2j)}{2} = 2 - 3j$

Por otro lado consideramos $z = x + jy$ y entonces: $|x - jy - 3 + j| < 2$

$\Rightarrow |x - 3 + (-y+1)\,j| < 2 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} < 2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 < 4$



Es el interior de un círculo con centro en (3;1) y radio r=2 sin la circunferencia:

La intersección es únicamente: $4 + j$

Ejercicio 2:

$$X(z) = \frac{2z^3 - 10z^2 - 28z}{(z-3)(z-5)(z+2)} = \frac{z\,(2z-14)}{(z-3)(z-5)} \qquad \text{entonces } x(n) = 4 \bullet 3^n - 2 \bullet 5^n$$

Ejercicio 3:

a) Debe ser $f(t) = t^2 + 1$ en (-1;0) también así queda PAR. El valor medio es: 4/3

b) Debe completarse $f(t) = -t^2-2t-2$ en (-1;0) para que tenga simetría de media onda.

Ejercicio 4:

a) No es estable pues tiene dos polos con parte real positiva (5 +2j y 5-2j)

b) $Y(s) = \dfrac{s^2 - s - 6}{(s^2 - 10s + 29)(s+1)} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{Bs + C}{s^2 - 10s + 29} \Rightarrow A = -0.1 \quad B = 1.1 \quad C = -3.1$

$\Rightarrow y(t) = -0.1\, e^{-t} + 1.1 \cos(2t)\, e^{5t} + 1.2\, \text{sen}(2t)\, e^{5t}$

Mat. Sup. 1°p. — tema 40 — 21-10-13

Ej 1 Halle en forma binómica todos los complejos z que cumplan:

$$z^2-6z+11+(2z-10)j=0 \quad \wedge \quad |\bar{z}-(3-j)| \leq 2$$

- $z^2-6z+11+2zj-10j=0 \rightarrow z^2-(6-2j)z+(11-10j)=0 \rightarrow a=1,\ b=-(6-2j),\ c=11-10j$

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6-2j\pm\sqrt{(-6+2j)^2-4(11-10j)}}{2}=\frac{6-2j\pm\sqrt{-12+16j}}{2}$$

- $w^2=-12+16j \xrightarrow[|w|=20]{x=-12} w_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{20+(-12)}{2}}\pm\sqrt{\frac{20-(-12)}{2}}\,j \quad w_1=2+4j,\quad w_2=-2-4j$

$$z_1=\frac{6-2j+w_1}{2}=\frac{6-2j+2+4j}{2}=\boxed{4+j=z_1}$$

$$z_2=\frac{6-2j+w_2}{2}=\frac{6-2j-2-4j}{2}=\boxed{2-3j=z_2}$$

- $|\bar{z}-(3-j)|<2 \rightarrow |\bar{z}_1-(3-j)|=|(4-j)-(3-j)|=1<2$ ✓
  $|\bar{z}_2-(3-j)|=|(2+3j)-(3-j)|=\sqrt{17}>2$
  $\boxed{z=4+j}$ ✓

Ej 2 Resuelva utilizando transformada Z:

$$x(n+2)-3x(n+1)-10x(n)=-40.3^n \quad \text{con } x(0)=2 \wedge x(1)=2$$

$$z^2\left[X(z)-x(0)-\frac{x(1)}{z}\right]-3z\left[X(z)-x(0)\right]-10X_z=\frac{-40z}{z-3}$$

$$z^2X(z)-2z^2-2z-3zX(z)+6z-10X_z=\frac{-40z}{z-3}$$

$$X(z)(z^2-3z-10)=\frac{-40z}{z-3}+2z^2-4z=\frac{-40z+2z^3-6z^2-4z^2+12z}{z-3}=\frac{2z^3-10z^2-28z}{z-3}$$

$$X(z)=z\left[\frac{2z^2-10z-28}{(z-3)(z-5)(z+2)}\right]=z\left[\frac{A^{=4}}{z-3}+\frac{B^{=-2}}{z-5}+\frac{C^{=0}}{z+2}\right]=\frac{4z}{z-3}-\frac{2z}{z-5} \rightarrow \boxed{x(n)=4.3^n-2.5^n}$$ ✓

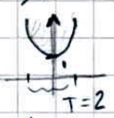
$\rightarrow A(z^2-3z-10)+B(z^2-z-6)+C(z^2-8z+15)=2z^2-10z-28$

Ej 3 Sea $f(t)=t^2+1$ en $(0,1)$

a) Complete f en $(-1,0)$ para que la Serie Exponencial de Fourier tenga todos los coeficientes reales e indique el valor medio

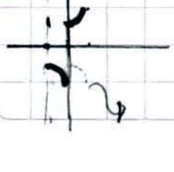
Para que tenga coef. reales → en trigonométrica serie de cosenos → función par

$f(t)=t^2+1 \quad (-1,0)$



Valor medio $=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^2+1\,dt=\boxed{\frac{4}{3}=\text{Valor med.}}$ ✓

b) Complete gráfica y analíticamente f para que tenga simetría de media onda



$$f(t)=\begin{cases}t^2+1 & \text{si } t\in[0,1]\\ t^2-2t-2 & \text{si } t\in[-1,0]\end{cases}$$

$-1-(t+1)^2 \quad -1-t^2+2t-1$

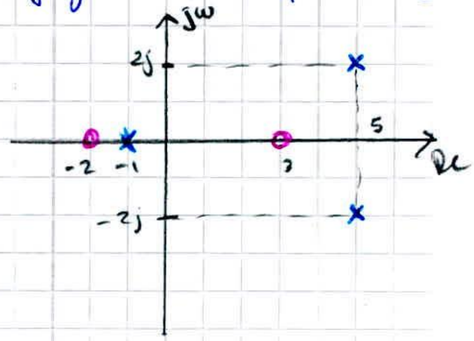
EJ 4 Dada la transferencia de un sistema: $G(s) = \dfrac{s^2 - s - 6}{(s^2 - 10s + 29)(s+1)}$

a) Indique si el sistema es estable (justifique) y grafique aproximadamente el corte de $|G(s)|$ por el eje real

$$G(s) = \frac{(s-3)(s+2)}{[(s-5)^2+4](s+1)}$$

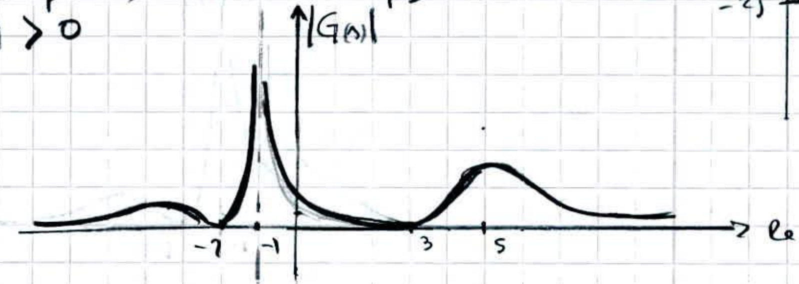
$\to$ ceros: $3; -2; \infty$

polos: $p_1 = 5+2j$
$p_2 = 5-2j$
$p_3 = -1$



ES INESTABLE pues $Re(p_1)$ y $R(p_2) > 0$

$|G(0)| = 0{,}20$



b) Halla la respuesta del sistema al $\underbrace{\text{impulso unitario}}_{X(s)=1}$ $\to x(t) = \delta(t)$

$$Y(s) = G(s)\, X(s) = G(s)$$

$$Y(s) = \frac{(s-3)(s+2)}{[(s-5)^2+4](s+1)} = \frac{As+B}{(s^2-10s+29)} + \frac{C}{s+1}$$

$$\to A(s^2+s) + B(s+1) + C(s^2-10s+29) = s^2 - s - 6$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ A + B - 10C = -1 \\ B + 29C = -6 \end{cases} \to \begin{matrix} A = 11/10 \\ B = -31/10 \\ C = -1/10 \end{matrix} \to Y(s) = \frac{\frac{11}{10}s - \frac{31}{10}}{(s-5)^2+4} - \frac{\frac{1}{10}}{s+1} =$$

$$= \frac{\frac{11}{10}s - \frac{55}{10}}{(s-5)^2+4} + \frac{\frac{24}{10}}{(s-5)^2+4} - \frac{\frac{1}{10}}{s+1} =$$

$$= \frac{11}{10} \cdot \frac{(s-5)}{(s-5)^2+4} + \frac{12}{10} \frac{2}{(s-5)^2+4} - \frac{1}{10} \frac{1}{s+1}$$

$$\boxed{y(t) = 1{,}1\, e^{5t} \cos(2t) + 1{,}2\, e^{5t} \operatorname{sen}(2t) - 0{,}1\, e^{-t}}$$